

مدل سازی ریاضی برای استخراج تقویم هجری قمری قراردادی^۱

محمد رضا صیاد^۲

چکیده

تاریخ نویسان و سایر پژوهشگران درباره چگونگی پیدایی و سیر تحول تقویم هجری قمری در بخش های مختلف جزیره العرب، در ۱۸ سال نخست پس از هجرت پیامبر اکرم (ص) اختلاف نظر دارند. هریک از این پژوهشگران با استناد به آیات شریفه قرآن مجید که موضوع آن نجوم و تقویم است و نیز به استناد قراردادهای، صلحنامه‌ها، فرامین و نامه‌های نوشته شده در این سال‌ها و انبوه روایات نقل شده در کتب تاریخ و علوم دینی دوره اسلامی، نظراتی متفاوت و گاه متناقض، اظهار کرده‌اند؛ اما تاکنون، هیچ یک از آنها از دایره فرض و گمان فراتر نرفته‌اند (عبداللهی، ص ۱۵-۱۸، ۲۲-۲۶، ۳۰؛ مهدی، ص ۱۰-۱۹، ۲۸، ۳۹-۵۲، ۶۷، ۶۹).

از اواسط قرن دوم هجری قمری تا زمان حاضر، محاسبات تقویم هجری قمری، همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. برخی از این پژوهشگران برای پاسخ گویی به نیازهای روزمره روزگار خود، روش‌های محاسباتی و جدولی را ارائه کرده‌اند. با اینکه، هریک از این روش‌ها بسته به مورد استفاده آنها دارای مزایا و محاسنی است؛ اما انجام محاسبات ارائه شده در آنها به سهولت برای همگان امکان پذیر نیست. برای برطرف کردن این ضعف، نگارنده به کمک رایانه به پژوهش در زمینه مدل سازی ریاضی برای استخراج تقویم هجری قمری قراردادی پرداخته و بر اساس نتایج به دست آمده، دو معادله طرح کرده که در مقاله حاضر به پژوهندگانی که به نحوی با مسائل تقویم هجری قمری قراردادی سروکار دارند، تقدیم می‌شود (صیاد، «معادله‌ها»، ص ۱۷۵-۱۸۱). معادلات این مقاله برای

۱. این مقاله متن سخنرانی مؤلف است که در ۲۴ دی ماه ۱۳۸۰ در پژوهشکده تاریخ علم ایراد کرده است.

۲. کارشناس پژوهشی مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

بازة زمانی نامحدود (از سال ۱ هجری قمری قراردادی به بعد)، امکان می‌دهند که تقویم هجری قمری قراردادی، از لحاظ تعیین سال‌های عادی و کبیسه، روز سال و روز هفته، محاسبه شود.

کلیدواژه‌ها: مدل سازی ریاضی، تقویم هجری قمری هلالی، پیش بینی رؤیت هلال ماه، طول ماه هلالی، تقویم هجری قمری قراردادی، طول سال قمری متوسط، معادلات تقویم هجری قمری قراردادی.

مقدمه

برای آشنایی بیشتر با اصول و پایه های اساسی تقویم‌های هجری قمری هلالی و قراردادی، مطالب زیر به اختصار شرح داده می‌شود:

تقویم هجری قمری هلالی، تقویم دینی مسلمانان جهان است. مبدأ این تقویم، اول محرم سالی است که پیامبر اکرم (ص) از مکه معظمه به مدینه منوره هجرت فرمودند. این مبدأ قراردادی است و ۵۹ تا ۷۱ شبانه‌روز قبل از تاریخ تقریبی هجرت پیامبر اکرم (ص) اختیار شده است. اسلام‌شناسان درباره تاریخ هجرت از ۱ تا ۱۳ ربیع‌الاول ۱ هجری قمری اختلاف نظر دارند (عبداللهی، ص ۲۲، ۲۸-۲۹؛ خواندمیر، ص ۲۹۷؛ حمزة اصفهانی، ص ۱۵۷، ۱۶۴؛ طبری، ص ۹۲۵-۹۲۶). این مبدأ در اغلب کشورهای اسلامی، روز جمعه ۱ محرم ۱ هجری قمری (مطابق ۲۷ تیر ۱ هجری شمسی) مطابق ۱۶ ژوئیه ۶۲۲ میلادی (ژولیوسی) اختیار شده است؛ اما بعضی از منجمان کشورهای اسلامی در زیج‌های خود، روز پنجشنبه ۱ محرم ۱ هجری قمری (مطابق ۲۶ تیر ۱ هجری شمسی) مطابق ۱۵ ژوئیه ۶۲۲ میلادی را مبدأ تاریخ گرفته‌اند، زیرا به جای لحظه نیمه شب، لحظه غروب خورشید را آغاز شبانه‌روز به حساب آورده‌اند (سیبولسکی^۱، ص ۱۴-۱۵؛ ووستنفلد^۲، ماهلر^۳، ص ۲۲-۲۳).

1. Tsybulsky

2. Wüstenfeld

3. Mahler

سالهای این تقویم، شامل ۱۲ ماه قمری هلالی است که به ترتیب عبارتند از: محرم، صفر، ربیع‌الاول، ربیع‌الثانی، جمادى‌الاول، جمادى‌الثانیه، رجب، شعبان، رمضان، شوال، ذیقعد و ذیحجه. تاریخ اول هر ماه قمری با رؤیت هلال ماه نو در شامگاه روز بیست و نهم یا سیام ماه قبل، به ثبوت می‌رسد. با این حساب، تعداد شبانه‌روزهای هر ماه قمری که برابر با مدت زمان بین دو رؤیت متوالی هلال ماه نو است، ۲۹ یا ۳۰ شبانه‌روز گرفته می‌شود. در این تقویم، نوع ماههای قمری، حقیقی است.

پیش بینی وضعیت رؤیت هلال ماههای قمری به مقادیر مشخصه های ماه و خورشید و موقعیت جغرافیایی رصدگر در لحظه غروب خورشید تاریخ بیست و نهمین روز ماه قبل، بستگی دارد. به عبارت دقیق‌تر، کارشناسان مسائل تقویم هجری قمری، برای بررسی وضعیت رؤیت پذیری یا رؤیت ناپذیری هلال ماههای قمری در شامگاه بیست و نهمین روز هر ماه قمری در نقطه جغرافیایی مورد نظر، روش علمی تازه‌ای را به کار می‌برند. این روش به این شرح است که در مرحله نخست، مشخصه‌های ماه و خورشید را برای لحظه غروب خورشید بیست و نهمین روز ماه قمری محاسبه می‌کنند. سپس، این مقادیر مشخصه ها را با همه مقادیر مشخصه های متناظر آنها بر اساس رکوردهای جهانی رؤیت هلال ماه، مقایسه می‌کنند. این رکوردها، مربوط به رؤیت هلال ماهها از سال ۱۸۵۹م تا زمان حاضر هستند که به تأیید مراکز نجومی معتبر جهان رسیده‌اند. حالات متفاوتی ممکن است رخ دهد. کارشناسان بر اساس این حالات، درباره رؤیت پذیری یا رؤیت ناپذیری هلال ماه در شامگاه بیست و نهمین روز هر ماه قمری و در نتیجه، تعیین تاریخ اول هر ماه نو قمری برای آن نقطه جغرافیایی مورد نظر، اظهار نظر می‌کنند. البته، این امکان وجود دارد که هلال ماه نو در مکانی بر روی کره زمین، دقیقاً قبل یا بعد از لحظه غروب خورشید روزهای بیست و نهم یا سیام رؤیت شود. این اختلاف یک شبانه‌روز در رؤیت هلال ماههای قمری، اختلاف یک شبانه‌روز در تقویم هجری قمری هلالی کشورهای اسلامی را سبب می‌شود.

طول ماه هلالی

طول ماه هلالی، مدت زمان بین دو لحظه ماه نو نجومی متوالی است. مقدار متوسط طول ماه هلالی از سال ۱۹۰۰ تا ۲۰۰۳ م، $29/530589$ شبانه‌روز یا معادل ۲۹ شبانه‌روز و ۱۲ ساعت و ۴۴ دقیقه و $2/9$ ثانیه است. طول ماه هلالی متوسط، ثابت

نیست و به مقدار بسیار کمی تغییر می‌کند. طول ماه هلالی حقیقی نیز ثابت نیست و به علت تأثیر عوامل نجومی، به مقدار قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند. از سال ۱۳۶۳ ش (مطابق ۱۹۸۴ م) به بعد، چند تن از پژوهشگران علم نجوم با انجام پژوهشها و محاسبات رایانه‌ای گسترده درباره تعداد زیادی از لحظه‌های ماه نو نجومی، طول ماههای هلالی حقیقی و همچنین ترسیم نمودارهای خاص، به تغییرات دقیق طول ماه هلالی حقیقی، پی برده‌اند. نتایج کارهای چهارتن از پژوهشگران به شرح زیر است:

صیاد، تغییرات طول ماه هلالی حقیقی را در بازه زمانی تقریباً ۳۸ سال شمسی یا در طی ۴۶۹ طول ماه هلالی حقیقی (ماه گردهای شماره ۴۵۹ تا شماره ۹۲۷) که مربوط به لحظه‌های ماه نو نجومی از ۲۸ ژانویه ۱۹۶۰ تا ۲۹ دسامبر ۱۹۹۷ می‌باشد، مورد بررسی قرار داد و به این نتیجه رسید که طول ماه هلالی حقیقی، در بازه زمانی یاد شده، بین ۲۹ شبانه‌روز و ۶ ساعت و ۵۳ دقیقه (کوتاه‌ترین زمان، مربوط به ماه‌گرد شماره ۵۲۶ با تاریخ ماه نو نجومی ۲۹ ژوئن ۱۹۶۵) تا ۲۹ شبانه‌روز و ۱۹ ساعت و ۵۵ دقیقه (طولانی‌ترین زمان، مربوط به ماه‌گرد شماره ۶۳۱ با تاریخ ماه نو نجومی ۲۴ دسامبر ۱۹۷۳) و با دامنه تغییرات ۱۳ ساعت و ۲ دقیقه در طرفین مقدار متوسط طول ماه هلالی، تغییر می‌کند. افزون بر این، دوره تغییرات طول ماه هلالی حقیقی، معادل نیم دوره ساروس^۱ است. به عبارت دقیق‌تر، پس از سپری شدن ۱۱۱ یا ۱۱۲ ماه هلالی، طول ماههای هلالی حقیقی با تغییرات جزئی نسبت به ترتیب دوره‌های قبلی، در دوره‌های بعدی تکرار می‌شوند. نیم دوره‌های ساروس اول تا چهارم به ترتیب شامل ۱۱۲، ۱۱۱، ۱۱۲ و ۱۱۲ ماه هلالی حقیقی است (صیاد، «جدولهای تقویم»، ص ۸۰-۸۱؛ همو، «دوره تغییرات»، ص ۱۹۰-۱۹۵).

ریچارد استفنسن^۲ از دانشگاه دارام^۳ انگلستان و لیو باولین^۴ از رصدخانه کوه ارغوانی^۵ چین، تغییرات طول ماه هلالی حقیقی را برای مدت ۵۰۰۰ سال میلادی (۱۰۰۰ ق م تا ۴۰۰۰ م) مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه جالب رسیدند که طول

1. Saros
2. Richard Stephenson
3. Durham
4. Liu Baolin
5. Purple Mountain Observatory

ماه هلالی حقیقی، در بازه زمانی یاد شده، بین ۲۹ شبانه‌روز و ۶ ساعت و ۲۶ دقیقه (کوتاه‌ترین زمان در سال ۳۰۲ ق م) تا ۲۹ شبانه‌روز و ۲۰ ساعت و ۶ دقیقه (طولانی‌ترین زمان در سال ۴۰۰ ق م) و با دامنه تغییرات ۱۳ ساعت و ۴۰ دقیقه در طرفین مقدار متوسط طول ماه هلالی، تغییر می‌کند (Moonwatcher's Corner, p.403).

علاء جواد، عضو انجمن منجمان غیر حرفه‌ای کویت، تغییرات طول ماه هلالی حقیقی را برای مدت ۸۰۰ سال میلادی (۱۶۰۰ تا ۲۴۰۰ م) مورد بررسی قرار داد و به این نتیجه جالب رسید که طول ماه هلالی حقیقی، در بازه زمانی یاد شده، بین ۲۹ شبانه‌روز و ۶ ساعت و ۳۱ دقیقه (کوتاه‌ترین زمان با تاریخ ماه نو نجومی ۱۸ ژوئن ۱۷۰۸) تا ۲۹ شبانه‌روز و ۱۹ ساعت و ۵۹ دقیقه (طولانی‌ترین زمان با تاریخ ماه نو نجومی ۱۵ دسامبر ۱۶۱۰) و با دامنه تغییرات ۱۳ ساعت و ۲۸ دقیقه در طرفین مقدار متوسط طول ماه هلالی، تغییر می‌کند. افزون بر این، دوره تغییرات طول ماه هلالی حقیقی از دو نوع دوره تشکیل شده است: یکی دوره کوتاه (کمی بیش از ۱ سال شمسی، تقریباً معادل ۱۴ ماه هلالی، کمینه ۱۳ ماه و بیشینه ۱۸ ماه هلالی) و دیگری دوره طولانی (تقریباً معادل ۹ سال شمسی) که چندین دوره کوتاه یاد شده در درون آن قرار دارد (جواد، pp.76-77).

طول سال قمری متوسط

طول سال قمری، شامل ۱۲ طول ماه هلالی است. مقدار متوسط طول سال قمری، از سال ۱۹۰۰ تا ۲۰۰۳ م، $354/367068$ شبانه‌روز یا معادل ۳۵۴ شبانه‌روز و ۸ ساعت و ۴۸ دقیقه و $34/7$ ثانیه است. طول سال قمری متوسط ثابت نیست و به علت تغییرات بسیار کم طول ماه هلالی متوسط، مقدار آن نیز دستخوش تغییرات بسیار کم است.

تقویم هجری قمری قراردادی

تاریخ نویسان و سایر پژوهشگران، برای سهولت در محاسبات روزمره تقویم هجری قمری و برطرف کردن اشکالات ناشی از یک شبانه‌روز اختلاف در تقویم هجری قمری هلالی کشورهای اسلامی، از تقویمی به نام «تقویم هجری قمری قراردادی» استفاده می‌کنند. اصول و پایه‌های اساسی این تقویم به شرح زیر است:

مبدأ و نام ۱۲ ماه این تقویم، همانند تقویم هجری قمری هلالی است. تعداد شبانه‌روز ماههای این تقویم، متناوباً ۳۰ و ۲۹ شبانه‌روز است. یعنی ماه محرم ۳۰، ماه صفر ۲۹ شبانه‌روز و همین‌طور تا آخر محاسبه می‌شود. توضیح اینکه، تعداد شبانه‌روز ماه ذیحجه در سالهای عادی ۲۹ و در سالهای کبیسه ۳۰ شبانه‌روز است. در این تقویم، نوع ماههای قمری، قراردادی است.

طول سال قمری قراردادی ($354\frac{11}{30}$ یا $354/36$ شبانه‌روز) عدد صحیحی از

شبانه‌روزهای کامل نیست. حال آنکه در محاسبات روزمره تقویم هجری قمری، طول سال با تعداد شبانه‌روزهای کامل مورد نیاز است. از این رو، تاریخ نویسان و سایر پژوهشگران، برای برطرف کردن این مشکل در تقویم هجری قمری قراردادی از کسر شبانه‌روز طول سال قمری قراردادی صرف‌نظر می‌کنند و این سال ۳۵۴ شبانه‌روزه را «سال عادی» می‌نامند. پس از گذشت دو یا سه سال که مجموع کسور شبانه‌روز طول این سالها به یک شبانه‌روز می‌رسد، در این صورت، یک شبانه‌روز به آخر سال مورد نظر اضافه می‌کنند و آن سال ۳۵۵ شبانه‌روزه را «سال کبیسه» می‌نامند.

برای انطباق تقریبی تاریخ آغاز ماههای تقویم هجری قمری قراردادی با تاریخ آغاز ماههای تقویم هجری قمری هلالی، از دوره‌های کبیسه ۳۰ ساله قمری متفاوتی استفاده می‌شود که در هر ۳۰ سال، ۱۹ سال عادی و ۱۱ سال کبیسه دارد. دو نوع از معمول‌ترین این دوره‌ها به شرح جدول ۱ است.

نوع	سالهای کبیسه دوره ۳۰ ساله قمری										
	۱	۲	۵	۷	۱۰	۱۳	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۶
۲	۲	۵	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۸	۲۱	۲۴	۲۶	۲۹

جدول ۱- دو نوع از معمول‌ترین دوره‌های کبیسه ۳۰ سال قمری

از سال ۱۸۵۴م تا زمان حاضر، عده‌ای از پژوهشگران در محاسبات تقویم هجری قمری قراردادی، از یکی از دو دوره کبیسه ۳۰ ساله قمری مندرج در جدول ۱، استفاده کرده‌اند. پژوهشگرانی که دوره نوع ۱ را بکار برده‌اند، عبارتند از: فردیناند ووستنفلد (۱۸۵۴م)، ادوارد ماهلر (۱۸۸۷م)، عبدالغفار نجم‌الدوله (غره محرم الحرام ۱۳۲۱ق)،

عباسعلی ادیب (۱۳۵۵ ش)، محمدرضا صیاد (۱۳۶۳ ش، ص ۷۹-۱۱۱؛ ۱۳۶۸ ش، ص ۱۷۱-۱۸۳؛ و ۱۳۷۵ ش، ص ۱۱۵-۱۲۰)، ایرج ملک‌پور و محمدرضا صیاد (۱۳۷۰ ش)، احمد بیرشک (۱۳۶۷، ۱۳۷۳ و ۱۳۷۹ ش) و رحیم رضازاده مَلِک (۱۳۸۰ ش). پژوهشگرانی که دوره نوع ۲ را بکار برده‌اند، عبارتند از: سروولزی هیگ^۱ (۱۹۳۲ م، ص ۲۹۳-۳۲۸)، تقی ریاحی (۱۳۳۵ ش)، ج. س. پ. فریمن - گرنویل^۲ (۱۹۶۳ م، ص ۷۲-۱۷۲)، عباس ریاضی کرمانی (۱۳۵۰ ش)، رضا عبداللهی (۱۳۶۵ ش)، ابوالفضل نبئی (۱۳۶۵ ش) و و. سیبولسکی (۱۹۷۹ م).

البته، این نکته مهم را باید یادآوری کرد که دوره کبیسه ۳۰ ساله قمری نوع ۲ که توسط پژوهشگران یاد شده در برخی از تقویمهای تطبیقی منتشر شده در جهان، به کار رفته است، به علت فقدان مبنای محاسبات ریاضی صحیح، مورد تأیید نگارنده این مقاله نیست (صیاد، «جدولهای تقویم»، ص ۸۲-۸۳؛ همو، «معادله‌ها»، ص ۱۷۳-۱۷۴). از این رو، نگارنده مقاله، معادلات تقویم هجری قمری قراردادی را که در قسمت بعدی شرح داده خواهد شد، بر پایه دوره کبیسه ۳۰ ساله قمری نوع ۱، طراحی کرده است.

معادلات تقویم هجری قمری قراردادی

این معادلات، برای بازه زمانی نامحدود (از سال ۱ هجری قمری قراردادی به بعد) امکان می‌دهد که تقویم هجری قمری قراردادی، از لحاظ تعیین سال‌های عادی و کبیسه، روز سال و روز هفته، محاسبه شود. علائم قراردادی مشخصه‌ها و توابع در معادلات تقویم هجری قمری قراردادی، به شرح جدول ۲ است.

1. Sir Wolseley Haig

2. Freeman - Grenville

شرح	قرارداد
کاربرد تابع $FIX(A)$ است. این تابع برای تبدیل عدد اعشاری A به عدد صحیح (منظور کردن مقدار صحیح و حذف قسمت اعشاری) به کار می‌رود.	$\langle \rangle$
کاربرد تابع $MOD(I, J)$ است. این تابع برای محاسبه باقیمانده تقسیم عدد صحیح I بر عدد صحیح J به کار می‌رود.	$mod(i, j)$
سال ($y \geq 1$)	Y
مقدار مشخص کننده سال‌های عادی و کبیسه. اگر $L = 0$ باشد، سال y عادی است و اگر $L = 1$ باشد، سال y کبیسه است.	L
روز ماه ($1 \leq D \leq 30$)	D
ردیف ماه ($1 \leq M \leq 12$)	M
روز سال ($1 \leq N \leq 355$)	N
روز هفته ($0 \leq W \leq 6$). اعداد ۰ تا ۶ به ترتیب روزهای شنبه تا جمعه را مشخص می‌کنند.	W

جدول ۲- علایم قراردادی مشخصه‌ها و توابع در معادلات تقویم هجری قمری قراردادی

روش استفاده از معادلات با ذکر مثالهایی به این شرح است:

معادله سال عادی و کبیسه

برای تعیین سال عادی و کبیسه، از معادله ۱ استفاده می‌کنیم.

$$L = \left\langle \frac{11}{30}y + 0.5 \right\rangle - \left\langle \frac{11}{30}(y-1) + 0.5 \right\rangle \quad (1)$$

مثال ۱- وضعیت سال ۱۴۲۲ هجری قمری قراردادی ($y = 1422$) را از لحاظ عادی

یا کبیسه بودن تعیین می‌کنیم.

$$L = \left\langle \frac{11}{30} \times 1422 + 0.5 \right\rangle - \left\langle \frac{11}{30}(1422-1) + 0.5 \right\rangle$$

$$L = \langle 521/9 \rangle - \langle 521/5 \rangle = 0 \quad (\text{سال عادی})$$

مثال ۲- وضعیت سال ۱۳۶۸ هجری قمری قراردادی ($y = 1368$) را از لحاظ عادی یا کیسه بودن تعیین می‌کنیم.

$$L = \left\langle \frac{11}{30} \times 1368 + 0/5 \right\rangle - \left\langle \frac{11}{30} (1368 - 1) + 0/5 \right\rangle$$

$$L = \langle 5.2/1 \rangle - \langle 5.1/7 \rangle = 1 \quad (\text{سال کیسه})$$

معادله روز سال^۱

برای تعیین روز سال از معادله ۲ استفاده می‌کنیم.

$$N = \langle 29/5M - 29 \rangle + D \quad (2)$$

مثال - روز سال ۱۹ رمضان ($D = 19, M = 9$):

$$N = \langle 29/5 \times 9 - 29 \rangle + 19 = 255$$

معادله روز هفته

برای تعیین روز هفته از معادله ۳ استفاده می‌کنیم.

(۳)

$$W = \text{mod} (354y + \left\langle \frac{11}{30} (y - 1) + 0/5 \right\rangle + \langle 29/5M - 29 \rangle + D - 349, 7)$$

مثال روز هفته ۲۱ محرم ۱۳۶۸ هجری قمری قراردادی

$$(D = 21, M = 1, y = 1368)$$

$$W = \text{mod} (354 \times 1368 + \left\langle \frac{11}{30} (1368 - 1) + 0/5 \right\rangle + \langle 29/5 \times 1 - 29 \rangle + 21 - 349, 7)$$

$$W = \text{mod} (484445, 7) = 3 \quad (\text{سه شنبه})$$

۱. صورت اولیه معادله روز سال چنین بود: $N = 30 \cdot \left\langle \frac{M}{2} \right\rangle + 29 \left\langle \frac{M-1}{2} \right\rangle + D$ که به پیشنهاد داور

دوم و تأیید مؤلف به صورت معادله (۲) تغییر کرد.

یادآوری

از آنجا که بعضی از منجمان کشورهای اسلامی در زیج‌های خود، روز پنجشنبه ۱ محرم ۱ هجری قمری را به عنوان مبدأ تقویم هجری قمری قراردادی، اختیار کرده‌اند (سیبولسکی، ص ۱۵)، از این رو، باید توجه داشت که در محاسبات روز هفته تقویم هجری قمری قراردادی این گونه منجمان، از نتیجه محاسبه روز هفته حاصل شده از معادله ۳، یک شبانه‌روز کاسته شود. در این صورت، روز هفته ۲۱ محرم ۱۳۶۸ هجری قمری قراردادی، دوشنبه است.

منابع

- ادیب، عباسعلی، کتاب تطبیق در بیان سالها و ماه‌های هجری قمری - هجری شمسی، اصفهان، ۱۳۵۵ ش.
- اصفهانی، حمزه بن حسن، تاریخ پیامبران و شاهان (سنی ملوک الأرض و الانبیاء)، ترجمه جعفر شعار، تهران، ۱۳۴۶ ش.
- بیرشک، احمد، گاهنامه تطبیقی سه هزارساله، تهران، ۱۳۶۷ ش.
- همو، گاهنامه تطبیقی سه هزارساله، تهران، ۱۳۷۳ ش.
- همو، گاهشماری ایرانی، تهران، ۱۳۷۹ ش.
- خواند میر، حبیب‌السیر، تهران، ۱۳۵۳ ش.
- رضازاده ملک، رحیم، زیج ملک (استخراج و تطبیق تقویمها)، تهران، ۱۳۸۰ ش.
- ریاحی، تقی، شرح تقویمهای مختلف و مسئله کبیسه‌های جلالی، تهران، ۱۳۳۵ ش.
- ریاضی کرمانی، عباس، مقدمه‌ای بر نجوم عالی، تهران، ۱۳۵۰ ش.
- صیاد، محمدرضا، «جدولهای تقویم هجری قمری»، گزارش پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور، بخش ریاضی و آمار دانشگاه شیراز، ۱۳۶۳ ش.
- همو، «معادله‌های تقویم هجری قمری قراردادی»، گزارش بیستمین کنفرانس ریاضی کشور، گروه ریاضی دانشگاه تهران، ۱۳۶۸ ش.
- همو، «جدول تقویم هجری قمری قراردادی»، گزارش بیست و هفتمین کنفرانس ریاضی کشور، بخش ریاضی دانشگاه شیراز، ۱۳۷۵ ش.
- همو، «دوره تغییرات طول ماه هلالی حقیقی»، فصلنامه علمی - پژوهشی فرهنگ، ویژه تاریخ علم در ایران و اسلام، سال ۹، شماره ۴ / سال ۱۰، شماره ۱، شماره پیاپی ۲۰ و ۲۱، زمستان ۱۳۷۵ / بهار ۱۳۷۶ ش.

طبری، محمد بن جریر، تاریخ طبری یا تاریخ الرسل و الملوک، ترجمه ابوالقاسم پاینده، تهران، ۱۳۵۲ ش.

عبداللهی، رضا، تحقیقی در زمینه گاه‌شماری هجری و مسیحی، تهران، ۱۳۶۵ ش.
فریمن - گرنویل، ج. س. پ.، «تقویم‌های اسلامی و مسیحی و تبدیل آنها به یکدیگر»، ترجمه فریدون بدره‌ای، کتابداری، نشریه کتابخانه مرکزی و مرکز اسناد دانشگاه تهران، ۱۳۴۷ ش.

ملک‌پور، ایرج و صیاد، محمدرضا، تقویم تطبیقی ۱۵۰۰ ساله هجری شمسی و هجری قمری قراردادی، گزارش علمی شماره ۷۴، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ۱۳۷۰ ش.
مهدی، محمدرضا، نظریه‌ای بر تقویم هجری قمری، پیشنهاد تقویم اسلامی زمان پیغمبر(ص)، ۱۳۶۳ ش.

نبئی، ابوالفضل، تقویم و تقویم نگاری در تاریخ، مشهد، ۱۳۶۵ ش.

نجم‌الدوله، عبدالغفار، رساله تطبیقیه، تهران، ۱۳۲۱ ق.

ووستنفلد، فردیناند و مایلر، ادوارد، تقویم تطبیقی هزار و پانصد ساله هجری قمری و میلادی، ترجمه قریشی، حکیم الدین، تهران، ۱۳۶۰ ش.

هیگ، سرولزلی، «جدول تطبیق سالهای مسیحی و هجری قمری»، ترجمه منوچهر ستوده، مجله فرهنگ ایران زمین، ج دوم، تهران، ۱۳۳۳ ش.

Jawad, Ala'a H., «How Long Is a Lunar Month?», *Sky & Telescope*, November 1993.

Baolin, Liu, «Moonwatcher's Corner», *Sky & Telescope*, October 1991.

Tsybulsky, V.V., *Calendars of Middle East Countries*, Moscow, 1979.

